# Tutorato 4 GE220

Docente: Massimiliano Pontecorvo. Esercitatore: Raffaele Carbone.
Tutori: Giovanni Passeri. Bruno Renzi.
Giovedì 29 marzo 2018.

**Esercizio 1.** *Mostrare che il quoziente di uno spazio topologico separabile (i.e.: che ammette un sottoinsieme numerabile denso) è separabile.*

**Esercizio 2.** *Sia $G$ il gruppo delle rotazioni di centro l'origine su $\mathbb{R}^3$. Mostrare che $G$ induce naturalmente un'azione di gruppo su $\mathbb{R}^3$ e descriverne le orbite e lo spazio quoziente.*

**Esercizio 3.** *Sia $X$ uno spazio topologico ed $Y \subseteq X$. Verificare che "$x \sigma y$ $:\iff$ $x, y$ sono punti d'accumulazione di $Y$" è una relazione d'equivalenza su $X$ e mostrare che tutte le successioni di $X/\sigma$ a valori in $Y/\sigma$ ammettono al più un limite.*

**Esercizio 4.** *Siano $X, Y$ spazi topologici e $q$ un'applicazione fra spazi topologici. Dato $U \subseteq X$, mostrare che le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

1. *$U$ è saturo.*
2. *$U$ è unione di fibre.*
3. *Se $x \in U$ allora $\forall y \in X$ tale che $q(y) = q(x)$ vale che $y \in U$.*

**Esercizio 5.** *(Fattorizzazione col quoziente) Siano $X, Y$ spazi topologici. Sia poi $f : X \to Y$.*

*Consideriamo la relazione d'equivalenza $x \sigma y$ se e solo se $f(x) = f(y)$. Consideriamo poi $X/\sigma$ con la topologia quoziente e $p : X \to X/\sigma$ la proiezione sul quoziente.*

1. *Mostrare che esiste un'applicazione continua ed iniettiva $i$, tale che il diagramma commuti, cioè tale che $i \circ p = f$.*
2. *Mostrare che $i$ è un omeomorfismo se e solo se $f$ è un'applicazione quoziente.*

**Esercizio 6.** *Siano $X := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ ed $Y := S^2$. Considerare le applicazioni $C_2 \times Y \to Y, (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ (dove $C_2$ è il gruppo ciclico con 2 elementi che in questo esercizio consideriamo realizzato come $C_2 := \{-1, 1\} \leq \mathbb{R}^*$) e $\mathbb{R}^* \times X \to X, (\lambda, x) \mapsto \lambda x$.*

1. *Mostrare che le due applicazioni appena definite sono azioni di gruppi rispettivamente su $X$ ed $Y$.*
2. *Mostrare che $X/\mathbb{R}^* \approx Y/C_2$*

**Esercizio 7.** *Mostrare che il quoziente di uno spazio connesso è sempre connesso ed sibire un controesempio che dimostra la falsità del viceversa.*